08/11/2017

Αν x^* είναι ρίζα πολλαπλότητας $m>1$ τότε η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει σε μια περιοχή της ρίζας αλλά η σύγκλιση είναι γραμμική.

Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε, υποθέτοντας ότι $f\in C^m(I)$

$$f(x_n)=f(x^*)+(x_n-x^*)f'(x^*)+\dots+\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi_{n1})$$
$$=\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n)=f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(x^*)+\dots+\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_{n2})$$

$$=\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_{n2})$$, ξ_{n1} και ξ_{n2} μεταξύ x_n και x^*.

$$x_{n+1}-x^*=x_n-x^*-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-x^*-\frac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$=x_n-x^*-\frac{1}{m}(x_n-x^*)\frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=1-\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}=1-\frac{1}{m}=a<1.$$

Η σύγκλιση είναι γραμμική.

__Άσκηση (από Ακρ.-Δουγ.)__

Αν x^* είναι ρίζα πολλαπλότητας m και η f είναι αρκετά ομαλή σε μια περιοχή της ρίζας ($f\in C^{m+1}(I)$) τότε ο αλγόριθμος

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\dots$$ παράγει ακολουθία καλά ορισμένη και συγκλίνουσα σε μια περιοχή του x^* και η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

Λύση

Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε ότι $f \in C^m(I)$

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_{n1}).$$

$$f'(x_n) = f(x^*) + (x_1 - x^*) f''(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m+1)}(\xi_{n2}),$$

ξ_1 και ξ_2 μεταξύ x_n και x^*.

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$= x_n - x^* - m \cdot \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m+1)}(\xi_{n2})}$$

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{m+1} f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(x^*) + \left(\frac{x_n - x^*}{m}\right) f^{(m+1)}(\xi_{n2})}$$

$$= \frac{\frac{(x_n - x^*)^2}{m} f^{(m+1)}(\xi_{n2}) - \frac{(x_1 - x^*)^2}{m+1} f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n - x^*}{m} f^{(m+1)}(\xi_{n2})}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{m} f^{(m+1)}(\xi_{n1}) - \frac{1}{m+1} f^{(m+1)}(\xi_{n2})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n - x^*}{m} f^{(m+1)}(\xi_{n2})}$$

$$= \frac{1}{m(m+1)} \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)},$$ τουλάχιστον τετραγωνική σύγκλιση

Αν $f^{(m+1)}(x^*) \neq 0$, τότε είναι ακριβώς τετραγ. σύγκλισης.

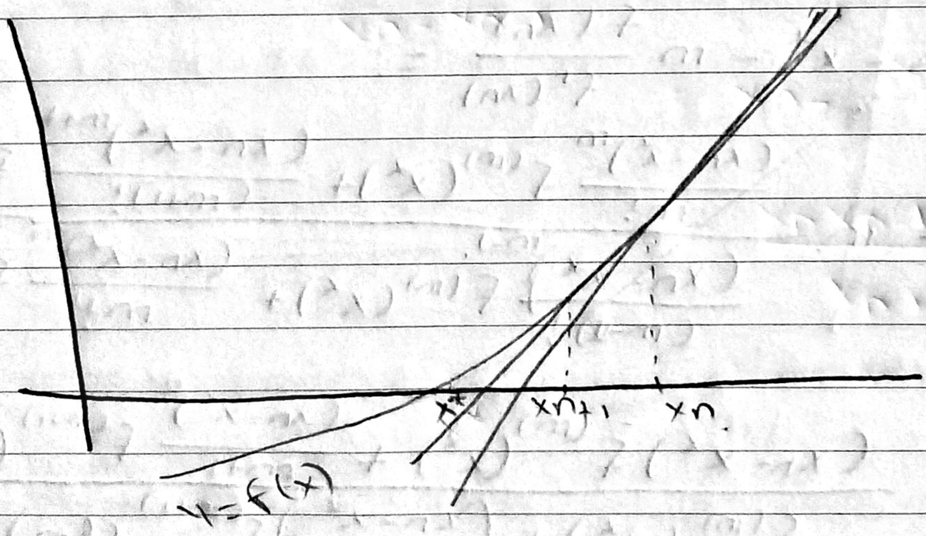
~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Μέθοδοι Τέμνουσας

Αν η f δεν είναι ολογλή τότε προσεγγίζουμε την $f'(x_n)$ ως την πεπερασμένη διαιρεμένη διαφορά $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \; x_0, x_1 \in I$$

περιοχή της ρίζας.



Θεώρημα (Σύγκλιση της Τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζα της $f(x)=0$ και $(a,b)\subset\mathbb{R}$, $f\in C^2(a,b)$, $f'(x^*)\neq 0$, $f''(x^*)\neq 0$. Τότε υπάρχει περιοχή I του x^*. Τέτοια ώστε αν $x_0, x_1 \in I$, διαφορικά μεταξύ τους, τότε η ακολουθία που παράγει η μέθοδος Τέμνουσας είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*. Η σύγκλιση είναι τάξης $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1.62$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Εύρεση τετραγωνικής ρίζας του a με τη μέθοδο του Newton:

$f(x)=x^2-a=0$, $f''(x)=2x$, $f''(x)=2$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

$f(0)=-a<0$, $f(x)>0$, $\forall x>0$.

$f''(x)>0$, $\forall x\in[0,\infty)$.

Ισχύει το Θ. ολικής σύγκλισης. Η μέθοδος συγκλίνει $\forall x_0\in(0,\infty)$.

$\sqrt{2}=1.414213562373$

$x_0=2$

$x_1=1.5$

$x_2\simeq 1.4166667$

$x_3=1.414215686274$

$x_4=1.414213562374$

Μέθοδος Τέμνουσας για $\sqrt{2}$:

$x_0 = 2$

$x_1 = 1.5$ 1. δεκ. ψηφ.

$x_2 = 1.41985$ 3. δεκ. ψηφ.

$x_3 = 1.4146.$ 5 δ. ψηφ.

$x_4 = 1.41481569$ 9. δ. ψ.

$x_5 = 1.414213562689$ 15 δ. ψ.

$x_6 = 1.414213562373$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{\frac{x_n^2 - a - (x_{n-1}^2 - a)}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{x_n + x_{n-1}}$$

$$= x_n - \frac{x_n(x_n + x_{n-1}) - x_n x_{n-1} - a}{x_n + x_{n-1}}$$

$$= \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}$$